

Compito di MD

1^o aprile 2014

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte. I testi degli esercizi sono su fogli separati su cui vanno scritte le rispettive soluzioni: **scrivere il nome su ciascun foglio**. Mettere entro un riquadro bene evidenziato la soluzione, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{N}_{100} = \{1, 2, \dots, 100\}$.

- Contare le coppie (A, B) con $A, B \subseteq \mathbb{N}_{100}$, $|A| = 5$ e $|B| = 10$.
- Contare le coppie (A, B) con $A, B \subseteq \mathbb{N}_{100}$, $|B| = 10$ e $A \subseteq B$.
- Contare le coppie (A, B) con $A, B \subseteq \mathbb{N}_{100}$ e $|A \cap B| = 10$.

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizio 2. Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 6^x \equiv 4 \pmod{19} \\ 110x \equiv 275 \pmod{75} \end{cases}$$

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizio 3.

Sia $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo che, rispetto alla base standard, è rappresentato dalla matrice

$$[B] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Dire per quali valori di k l'endomorfismo B è diagonalizzabile.
- b) Sia $k = 3$. Dire se è vero o falso che esiste una base di \mathbb{R}^3 tale che, rispetto a tale base, l'endomorfismo B ha matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ (i cui elementi sono i polinomi su \mathbb{R} di grado minore o uguale a due). Consideriamo l'applicazione lineare $L : V \rightarrow V$ che, per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$, manda il polinomio $ax^2 + bx + c$ nel polinomio $(3a + 3b)x^2 + (b + c)x + (a + b + 2c)$.

- a) Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine.
- b) Stabilire se L è invertibile e in caso affermativo determinare l'immagine del polinomio $4x^2 + x + 1$ tramite la funzione inversa.